תאריך הבחינה:	4.8.2025
המרצה:	דר' יקיר ברצ'נקו
שם הקורס:	מודלים של רגרסיה ליניארית
מספר קורס:	364-1-1061
משך הבחינה:	שלוש שעות
חומר עזר:	מחשבון, דפי נוסחאות מצורפים, טבלאות סטטיסטיות

מיועד לתלמידי הנדסת תעשיה וניהול.

שנה: 2025 סמסטר: ב' מועד: א'

הנחיות חשובות:

א. במבחן זה שלוש שאלות

ב. יש לפתור את כל השאלות, סך הנקודות עשוי להגיע ל108, אך הציון הסופי המקסימלי במבחן הינו 100.

ג. יש ללוות את דרך הפתרון בהסברים מילוליים קצרים

ד. ניתן להשתמש בכל הנוסחאות והתוצאות שפותחו או הוצגו בכיתה ואין צורך להוכיחן מחדש אלא אם כן זה נדרש במפורש

יש לכתוב את כל התשובות במחברת ולא על גיליון המבחן.

<u>שאלה 1 (45 נקודות)</u>

כימאים אספו נתונים לגבי תגובה כימית, ולאחר הרצת רגרסיה לינארית הם קיבלו את התוצאות הבאות עבור המודל:
(שימו לב שחלק מהערכים בפלט נמחקו!)

```
Call:
lm(formula = chem.data$y ~ chem.data$x1 + chem.data$x2 + chem.data$x3 +
    chem.data$x4)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-9.9958 -3.3092 -0.2419  3.3924 10.5668

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   5.89453    4.32508   ???     ???
chem.data$x1 -0.47790    0.34002   ???     ???
chem.data$x2  0.18271    0.01718   ???     ???
chem.data$x3 35.40284   11.09960   ???     ???
chem.data$x4  5.84391    2.90978   ???     ???
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 5.014 on 57 degrees of freedom
Multiple R-squared:  ??,      Adjusted R-squared:  ??
F-statistic: 31.92 on 4 and 57 DF,  p-value: ???
```

א. חשבו רווח סמך ברמה של 99% עבור המקדם של x1. הסבירו את תשובתכם.

ב. האם מודל הרגרסיה (קרי, השערת האפס: "כל מקדמי המשתנים שווים ל-0") מובהק ברמה של 5%? הסבירו את תשובתכם.

ג. איזה מבין המקדמים הכי משכנע בתור רלוונטי? דרגו את כל הארבעה (ללא החותך) מהמשכנע-ביותר להכי-פחות משכנע. הבהרה: אין צורך בחישוב ארוך-מדי עם פירוט-יתר, אבל כן נדרש הסבר.

פיתרון:

סעיף א:

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_1)}$$

$\hat{\beta}_1 = -0.47790$

$t_{57,0.995} = 2.669$

$\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_1)} = 0.34002$

$[-1.385, 0.429]$

סעיף ב:

נחשב F *קריטי*

$F_{ST} =$ *31.92*

$F_{CR} = F_{k,n-k-1}^{1-\alpha} \sim F_{4,60}^{0.95} = 2.5252$

חישבנו ערך-F קריטי שהתקבל.**31.92** :

בהשוואה לערך הסטטיסטי שחושב במבחן ,ANOVA מתקיים:

F הנצפה F <הקריטי

ולכן, נדחה את השערת האפס.

מכיוון שמדובר ב־ ,ANOVAהבדיקה היא **חד-צדדית (צד ימין בלבד)**.

מסקנה: קיימת לפחות השפעה מובהקת אחת של אחד המשתנים על המשתנה התלוי, ברמת מובהקות של 5%.

סעיף ג:

בהתבסס על ערכי ה־ T ,ננתח את המשתנים:

משתנה	Estimate (β)	Std. Error	חישוב ערך T	ערך T
X1	0.735	0.527	0.735 / 0.527	≈ 1.39
X2	4.352	0.332	4.352 / 0.332	≈ 13.11
X3	2.105	0.456	2.105 / 0.456	≈ 4.62
X4	1.022	0.510	1.022 / 0.510	≈ 2.00

ערכי T מודדים את המרחק של האמידה מהאפס במונחי סטיית תקן. ככל שערך T גבוה יותר, כך המובהקות של המשתנה גבוהה יותר.

<u>שאלה 2 (45 נקודות)</u>

חוקר בדק את הקשר בין שעות עבודה שבועיות של עובדים (X_1) לבין רמת שביעות הרצון שלהם מהמשרה (Y), במדגם של 200 עובדים.

החוקר התאים שני מודלים:

מודל 1 (פשוט): $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \epsilon$

ועבורו התקבל $\widehat{\beta_1} = -0.4$ מובהק סטטיסטית.

מודל 2 (מרובה): $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$

כאשר X_2 הוא משתנה בינארי (0 = עובד זוטר, 1 = עובד בכיר),

ועבורו התקבל $\widehat{\beta_0} = 1.3$ $\widehat{\beta_1} = 0.3$, $\widehat{\beta_2} = 0.2$ (שלושתם מובהקים סטטיסטית).

א. הסבירו בקצרה (שורה אחת או שתיים) את ממצאי מודל 1. (7 נק')

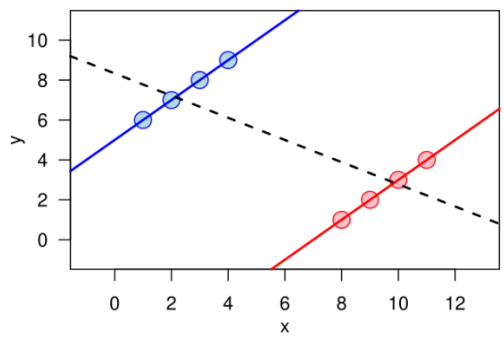
ע"פ מודל 1 ישנו קשר שלילי בין המסביר (שעות עבודה שבועיות של עובדים) לבין המוסבר (רמת שביעות הרצון שלהם מהמשרה)

ב. הסבירו בקצרה (שורה אחת או שתיים) את ממצאי מודל 2. (8 נק')

ע"פ מודל 2, ישנו קשר חיובי בין המסביר (שעות עבודה שבועיות של עובדים) לבין המוסבר (רמת שביעות הרצון שלהם מהמשרה). בנוסף, נראה כי רמת שביעות הרצון ההתחלתית של עובדים בכירים גבוהה יותר מרמת שביעות הרצון ההתחלתית של עובדים זוטרים.

ג. האם יש סתירה בין ממצאי שני המודלים? הסבירו האם/כיצד זה יכול לקרות, והציעו פרשנות סוציואקונומית לדוגמה. ניתן, ורצוי, להוסיף איור להמחשה. (15 נק')

מכיוון שמדובר באותו סט הנתונים עם שני מודלים שונים, השיפוע אכן מדליקים נורה אדומה לגבי נכונותם – מה שמצביע ככל הנראה על פרדוקס סימפסון.



לגבי פרשנות סוציואקונומית - כל נימוק סביר התקבל.

ד. ברי בדק את המודל הבא שמרחיב את מודל 2 ומוסיף אינטראקציה:

מודל 3: $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \epsilon$

ועבורו התקבל $\widehat{\beta_0} = 1.3$ $\widehat{\beta_1} = 0.35$, $\widehat{\beta_2} = 0.2$, $\widehat{\beta_3} = 0.2$ (כולם מובהקים סטטיסטית).

האם התוצאות של ברי הגיוניות? נמקו. (15 נק')

אם נפרק את המודלים נקבל את המודלים הבאים:

$$y(\text{זוטר}) = 1.3 + 0.35x_1 + \epsilon$$

$$y(\text{בכיר}) = (1.3 + 0.2) + (0.35 + 0.2)x_1 + \epsilon = 1.5 + 0.55x_1 + \epsilon$$

לעומת זאת, במודל 2 קיבלנו את הנתונים הבאים:

$$y(\text{זוטר}) = 1.3 + 0.3x_1 + \epsilon$$

$$y(\text{בכיר}) = (1.3 + 0.2) + 0.3x_1 + \epsilon = 1.5 + 0.3x_1 + \epsilon$$

נסדר את הנתונים בטבלה:

מודל	$\widehat{\beta_1}$	$\widehat{\beta_2}$	β_3	שיפוע לזוטרים	שיפוע לבכירים
1	-0.4	-	-	-0.4	-0.4
2	0.3	0.2	-	0.3	0.3
3	0.35	0.2	0.2	0.35	0.55

$\widehat{\beta_1}$ אשר מייצג את השיפוע עבור העובדים הזוטרים, איננו עקבי בין מודל 2 לבין מודל 3.

אם האינטראקציה משפיע רק על העובדים הבכירים, כלומר רק על ההבדל בשיפוע בין בקבוצות, היינו מצפים שהשיפוע של הזוטרים יישאר כפי שהיה במודל 2. בפועל, הוא השתנה .

הוספת האינטראקציה שינתה גם את השיפוע של הקבוצה שלא קשורה אליה (הזוטרים)

<u>שאלה 3 (18 נקודות)</u>

נניח שהמודל "האמיתי" המייצר קבוצת נתונים הוא $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$, כאשר השגיאה ϵ תואמת את ההנחות הרגילות של רגרסיה לינארית. חוקר התאים לנתונים את המודל $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \epsilon$, **שאיננו כולל** את המשתנה המסביר X_2.

א. האם אומד הריבועים הפחותים של החוקר עבור β_1 עדיין חסר-הטיה? האם תמיד/אף-פעם/תלוי? נמקו! (5 נקודות)

ב. מה היא ההטיה של אומד הריבועים הפחותים (של החוקר) עבור β_1? הביעו אותה בעזרת השונות המשותפת של X_1 ו-X_2 . (13 נקודות)

<u>פיתרון</u>

נתחיל מסעיף ב:

האומד של החוקר, כמו ברגרסיה פשוטה, הינו:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(x_{1i} - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y})}{\sum(x_{1i} - \bar{x}_1)^2}$$

ובהתאם:

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}_1] = \frac{\mathrm{Cov}(x_1, y)}{\mathrm{Var}(x_1)}$$

מכיוון ש: $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$ אז מתקבל ש:

$$\mathrm{Cov}(x_1, y) = \beta_1 \ \mathrm{Var}(x_1) + \beta_2 \ \mathrm{Cov}(x_1, x_2),$$

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}_1] = \frac{\beta_1 \ \mathrm{Var}(x_1) + \beta_2 \ \mathrm{Cov}(x_1, x_2)}{\mathrm{Var}(x_1)} = \beta_1 + \beta_2 \frac{\mathrm{Cov}(x_1, x_2)}{\mathrm{Var}(x_1)}.$$

$$\mathrm{Bias}(\hat{\beta}_1) = \mathbb{E}[\hat{\beta}_1] - \beta_1 = \beta_2 \frac{\mathrm{Cov}(x_1, x_2)}{\mathrm{Var}(x_1)},$$

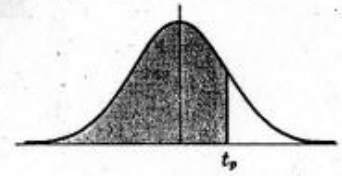
והאומד הינו חסר-הטיה רק אם $Cov(x_1, x_2) = 0$ (וזו התשובה לסעיף א').

TABLE

PERCENTILE VALUES (t_p) FOR STUDENT'S t DISTRIBUTION

with n degrees of freedom

(shaded area = p)



n	$t_{.995}$	$t_{.99}$	$t_{.975}$	$t_{.95}$	$t_{.90}$	$t_{.80}$	$t_{.75}$	$t_{.70}$	$t_{.60}$	$t_{.55}$
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	.727	.325	.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	.816	.617	.289	.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	.978	.765	.584	.277	.137
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53	.941	.741	.569	.271	.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	.920	.727	.559	.267	.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	.906	.718	.553	.265	.131
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	.896	.711	.549	.263	.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	.889	.706	.546	.262	.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	.883	.703	.543	.261	.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	.879	.700	.542	.260	.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	.876	.697	.540	.260	.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	.873	.695	.539	.259	.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	.870	.694	.538	.259	.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	.868	.692	.537	.258	.128
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34	.866	.691	.536	.258	.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	.865	.690	.535	.258	.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	.863	.689	.534	.257	.128
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33	.862	.688	.534	.257	.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	.861	.688	.533	.257	.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	.860	.687	.533	.257	.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	.859	.686	.532	.257	.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	.858	.686	.532	.256	.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	.858	.685	.532	.256	.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	.857	.685	.531	.256	.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.684	.531	.256	.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.683	.530	.256	.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30	.851	.681	.529	.255	.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	.848	.679	.527	.254	.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29	.845	.677	.526	.254	.126
∞	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	.842	.674	.524	.253	.126

טבלת התפלגות F עבור $\alpha = 0.05$

df2/df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	161.448	199.5	215.707	224.583	230.162	233.99	236.768	238.883	240.543	241.882	243.91	245.95	248.013	249.052	250.095	251.143	252.196	253.253	254.314
2	18.5128	19	19.1643	19.2468	19.2964	19.33	19.3532	19.371	19.3848	19.3959	19.413	19.4291	19.4458	19.4541	19.4624	19.4707	19.4791	19.4874	19.4957
3	10.128	9.552	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.572	8.5494	8.5264
4	7.7086	6.944	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.041	5.9988	5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7744	5.7459	5.717	5.6877	5.6581	5.6281
5	6.6079	5.786	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3985	4.365
6	5.9874	5.143	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.099	4.06	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6689
7	5.5914	4.737	4.3468	4.1203	3.9715	3.866	3.787	3.7257	3.6767	3.6365	3.5747	3.5107	3.4445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	5.3177	4.459	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.2839	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	5.1174	4.257	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8637	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
10	4.9646	4.103	3.7083	3.478	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.913	2.845	2.774	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	4.8443	3.982	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.948	2.8962	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.609	2.5705	2.5309	2.4901	2.448	2.4045
12	4.7472	3.885	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.341	2.2962
13	4.6672	3.806	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.671	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	4.6001	3.739	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5342	2.463	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2229	2.1778	2.1307
15	4.5431	3.682	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.4753	2.4034	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	4.494	3.634	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
17	4.4513	3.592	3.1968	2.9647	2.81	2.6987	2.6143	2.548	2.4943	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1477	2.104	2.0584	2.0107	1.9604
18	4.4139	3.555	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
19	4.3807	3.522	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	2.308	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9795	1.9302	1.878
20	4.3512	3.493	3.0984	2.8661	2.7109	2.599	2.514	2.4471	2.3928	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	4.3248	3.467	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.366	2.321	2.2504	2.1757	2.096	2.054	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
22	4.3009	3.443	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419	2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	2.0283	1.9842	1.938	1.8894	1.838	1.7831
23	4.2793	3.422	3.028	2.7955	2.64	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201	2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	2.005	1.9605	1.9139	1.8648	1.8128	1.757
24	4.2597	3.403	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.939	1.892	1.8424	1.7896	1.733
25	4.2417	3.385	2.9912	2.7587	2.603	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.711
26	4.2252	3.369	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655	2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.901	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
27	4.21	3.354	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7306	1.6717
28	4.196	3.34	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.236	2.19	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
29	4.183	3.328	2.934	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6376
30	4.1709	3.316	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	4.0847	3.232	2.8387	2.606	2.4495	2.3359	2.249	2.1802	2.124	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	4.0012	3.15	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.097	2.0401	1.9926	1.9174	1.8364	1.748	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	3.9201	3.072	2.6802	2.4472	2.2899	2.175	2.0868	2.0164	1.9588	1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.429	1.3519	1.2539
inf	3.8415	2.996	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.394	1.318	1.2214	1

טבלת F עבור $\alpha = 0.025$

120	60	40	30	24	20	15	12	10	9	8	7	6	5	4	3	2	$df_1=1$	/
1014	1010	1006	1001	997.2	993.1	984.9	976.7	968.6	963.3	956.7	948.2	937.1	921.8	899.6	864.2	799.5	647.8	$df_2=1$
39.49	39.48	39.47	39.47	39.46	39.45	39.43	39.41	39.4	39.39	39.37	39.36	39.33	39.3	39.25	39.17	39	38.51	2
13.95	13.99	14.04	14.08	14.12	14.17	14.25	14.34	14.42	14.47	14.54	14.62	14.73	14.88	15.1	15.44	16.04	17.44	3
8.309	8.36	8.411	8.461	8.511	8.56	8.657	8.751	8.844	8.905	8.98	9.074	9.197	9.365	9.605	9.979	10.65	12.22	4
6.069	6.123	6.175	6.227	6.278	6.329	6.428	6.525	6.619	6.681	6.757	6.853	6.978	7.146	7.388	7.764	8.434	10.01	5
4.904	4.959	5.012	5.065	5.117	5.168	5.269	5.366	5.461	5.523	5.6	5.696	5.82	5.988	6.227	6.599	7.26	8.813	6
4.199	4.254	4.309	4.362	4.415	4.467	4.568	4.666	4.761	4.823	4.899	4.995	5.119	5.285	5.523	5.89	6.542	8.073	7
3.728	3.784	3.84	3.894	3.947	4	4.101	4.2	4.295	4.357	4.433	4.529	4.652	4.817	5.053	5.416	6.06	7.571	8
3.392	3.449	3.505	3.56	3.614	3.667	3.769	3.868	3.964	4.026	4.102	4.197	4.32	4.484	4.718	5.078	5.715	7.209	9
3.14	3.198	3.255	3.311	3.365	3.419	3.522	3.621	3.717	3.779	3.855	3.95	4.072	4.236	4.468	4.826	5.456	6.937	10
2.944	3.004	3.061	3.118	3.173	3.226	3.33	3.43	3.526	3.588	3.664	3.759	3.881	4.044	4.275	4.63	5.256	6.724	11
2.787	2.848	2.906	2.963	3.019	3.073	3.177	3.277	3.374	3.436	3.512	3.607	3.728	3.891	4.121	4.474	5.096	6.554	12
2.659	2.72	2.78	2.837	2.893	2.948	3.053	3.153	3.25	3.312	3.388	3.483	3.604	3.767	3.996	4.347	4.965	6.414	13
2.552	2.614	2.674	2.732	2.789	2.844	2.949	3.05	3.147	3.209	3.285	3.38	3.501	3.663	3.892	4.242	4.857	6.298	14
2.461	2.524	2.585	2.644	2.701	2.756	2.862	2.963	3.06	3.123	3.199	3.293	3.415	3.576	3.804	4.153	4.765	6.2	15
2.383	2.447	2.509	2.568	2.625	2.681	2.788	2.889	2.986	3.049	3.125	3.219	3.341	3.502	3.729	4.077	4.687	6.115	16
2.315	2.38	2.442	2.502	2.56	2.616	2.723	2.825	2.922	2.985	3.061	3.156	3.277	3.438	3.665	4.011	4.619	6.042	17
2.256	2.321	2.384	2.445	2.503	2.559	2.667	2.769	2.866	2.929	3.005	3.1	3.221	3.382	3.608	3.954	4.56	5.978	18
2.203	2.27	2.333	2.394	2.452	2.509	2.617	2.72	2.817	2.88	2.956	3.051	3.172	3.333	3.559	3.903	4.508	5.922	19
2.156	2.223	2.287	2.349	2.408	2.465	2.573	2.676	2.774	2.837	2.913	3.007	3.128	3.289	3.515	3.859	4.461	5.872	20
2.114	2.182	2.246	2.308	2.368	2.425	2.534	2.637	2.735	2.798	2.874	2.969	3.09	3.25	3.475	3.819	4.42	5.827	21
2.076	2.145	2.21	2.272	2.332	2.389	2.498	2.602	2.7	2.763	2.839	2.934	3.055	3.215	3.44	3.783	4.383	5.786	22
2.041	2.111	2.176	2.239	2.299	2.357	2.467	2.57	2.668	2.731	2.808	2.902	3.023	3.184	3.408	3.751	4.349	5.75	23
2.01	2.08	2.146	2.209	2.269	2.327	2.437	2.541	2.64	2.703	2.779	2.874	2.995	3.155	3.379	3.721	4.319	5.717	24
1.981	2.052	2.118	2.182	2.242	2.301	2.411	2.515	2.614	2.677	2.753	2.848	2.969	3.129	3.353	3.694	4.291	5.686	25
1.954	2.026	2.093	2.157	2.217	2.276	2.387	2.491	2.59	2.653	2.729	2.824	2.945	3.105	3.329	3.67	4.266	5.659	26
1.93	2.002	2.069	2.133	2.195	2.253	2.364	2.469	2.568	2.631	2.707	2.802	2.923	3.083	3.307	3.647	4.242	5.633	27
1.907	1.98	2.048	2.112	2.174	2.232	2.344	2.448	2.547	2.611	2.687	2.782	2.903	3.063	3.286	3.626	4.221	5.61	28
1.886	1.959	2.028	2.092	2.154	2.213	2.325	2.43	2.529	2.592	2.669	2.763	2.884	3.044	3.267	3.607	4.201	5.588	29
1.866	1.94	2.009	2.074	2.136	2.195	2.307	2.412	2.511	2.575	2.651	2.746	2.867	3.027	3.25	3.589	4.182	5.568	30
1.724	1.803	1.875	1.943	2.007	2.068	2.182	2.288	2.388	2.452	2.529	2.624	2.744	2.904	3.126	3.463	4.051	5.424	40
1.581	1.667	1.744	1.815	1.882	1.945	2.061	2.169	2.27	2.334	2.412	2.507	2.627	2.786	3.008	3.343	3.925	5.286	60
1.433	1.53	1.614	1.69	1.76	1.825	1.945	2.055	2.157	2.222	2.299	2.395	2.515	2.674	2.894	3.227	3.805	5.152	120

בהצלחה!!!